

2.3 Dinamika fluida

2.3.1 Vrste strujanja

- **Stacionarno strujanje** je ono kod koga je u svakoj tački nekog preseka strujnog toka konstantna brzina i konstantan pritisak. Takvo je na primer strujanje iz rezervoara sa stalnim nivoom ili u cevima sa konstantnim pritiskom.

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \frac{dp}{dt} = 0$$

- **Nestacionarno strujanje** je ono kod koga se u svakoj tački nekog poprečnog preseka strujnog toka brzina i pritisak menjaju u vremenu. Takvo je na primer isticanje iz rezervoara sa promenljivom zapreminom kod koga se promenom nivoa menja brzina i pritisak.

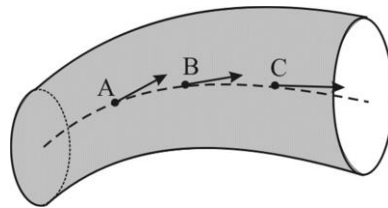
$$\frac{dv}{dt} \neq 0 \qquad \frac{dp}{dt} \neq 0$$

- **Gravitaciono strujanje** je ono koje nastaje usled delovanja zemljine teže. To je tečenje bez pritiska, sa slobodnom površinom. Takvo je tečenje u rekama, kanalizaciji, itd.
- **Strujanje pod pritiskom** nastaje usled razlike pritisaka u tečnosti do koje dolazi, na primer, radom pumpe ili od pritiska u rezervoaru u vodovodnoj mreži.
- **Laminarno strujanje** je kretanje tečnosti u paralelnim slojevima tako da ne dolazi do mešanja tečnosti između njih. Laminarno strujanje može biti i stacionarno i nestacionarno. Primer je strujanje podzemnih voda.
- **Turbulentno strujanje** je kretanje kod koga dolazi do vrtloženja i mešanja tečnosti. Takvo je na primer strujanje oko broda koji plovi.

2.3.2 Stacionarno strujanje. Jednačina kontinuiteta.

Pretpostavimo da je fluid nestišljiv. Posmatrajmo takav tok fluida da je u pojedinim tačkama brzina ista za sve čestice koje naiđu.

Tako na primer ako je u tačkama A, B i C respektivno brzina v_1 , v_2 i v_3 u proizvoljnom trenutku t_1 onda se pretpostavlja da su i u proizvoljnom trenutku t_2 brzine u tim tačkama iste. To znači da će svaka čestica kad se naće u tački A imati brzinu v_1 .

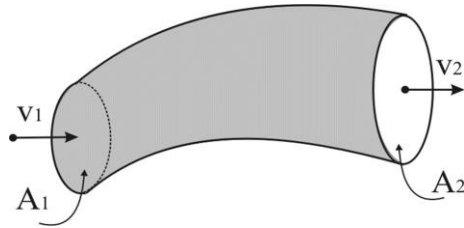


Slika 26

Linije duž kojih se te čestice kreću nazivaju se *strujne linije*. Očigledno je brzina čestice tečnosti u pojedinim tačkama strujne linije tangencijalna na strujnu liniju. Takvo strujanje naziva se *stacionarno* ili *ustaljeno strujanje*.

Uopšte uzevši pod strujnim linijama se podrazumevaju krive kod kojih tangenta u ma kojoj tački ima prvac brzine čestice fluida a putanja ili trajektorija jeste niz uzastopnih položaja koje zauzima neki delić pri kretanju. Kod stacionarnog strujanja ove linije se poklapaju.

Deo fluida ograničen strujnim linijama naziva se *strujna cev*. Čestice fluida koje se u jednom trenutku nalaze u strujnoj cevi ne izlaze iz te cevi. Pretpostavlja se da je fluid nestišljiv. Neka je na preseku strujne cevi A_1 brzina fluida v_1 a na preseku A_2 brzina v_2 .



Slika 27

U jedinici vremena kroz oba preseka protiče ista količina fluida tj. ista zapremina tečnosti. Pretpostavlja se da nema ni izvora ni ponora odnosno da u posmatranom delu toka tečnost ne dolazi sa strane niti odlazi u okolinu. Onda je:

$$A_1 \rho v_1 t = A_2 \rho v_2 t$$

gde je ρ gustina fluida a t vreme za koje se računa količina protekle tečnosti. Odatle je:

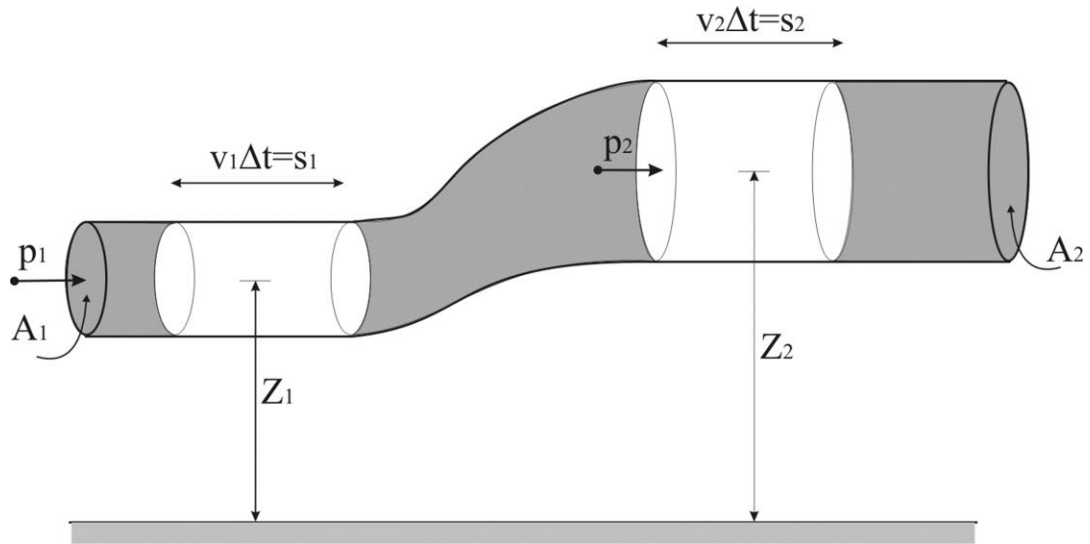
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

Ova relacija pokazuje da se održava količina fluida pri strujanju ili da je proizvod brzine proticanja nestišljive tečnosti i poprečnog preseka strujne cevi konstantan za datu strujnu cev. Ova relacija predstavlja *jednačinu kontinuiteta* i prikazuje zapreminu fluida koji ističe u jedinici vremena odnosno protok. Iz ovakve pretpostavke o fluidu zaključuje se da je brzina u cevi veća tamo gde je cev uža i obrnuto. Prema tome, fluid se ubrzava u smeru sužavanja cevi što znači da u tom smeru dejstvuje sila pa je jasno da je pritisak veći tamo gde je cev šira. Dakle u strujnoj cevi pritisak je manji na mestima gde je brzina veća.

2.3.3 Bernulijeva jednačina za idealan fluid

Energija tečnosti sastoji se iz tri dela

1. Od potencijalne energije koja iznosi mgz , gde se visina z_1 meri od nivoa isticanja.
2. Energije pritiska pV
3. Kinetičke energije $\frac{mv^2}{2}$



Prema tome je:

u položaju I

$$E_1 = mgz_1 + p_1V + \frac{mv_1^2}{2}$$

u položaju II

$$E_2 = mgz_2 + p_2V + \frac{mv_2^2}{2}$$

Kako smo pretpostavili da se radi o idelanom fluidu, odnosno da nema trenja, po zakonu o održanju energije mora biti

$$E_1 = E_2 = \text{const.}$$

odnosno uopšteno

$$pV + mgz + \frac{mv^2}{2} = \text{const.}$$

to je Bernulijev zakon koji glasi - zbir energije pritiska, potencijalne i kinetičke energije pri stacionarnom tečenju idealne tečnosti je konstantan.

Ako gornju jednačinu podelimo sa V dobijamo

$$p + \frac{mgz}{V} + \frac{mv^2}{2V} = \text{const.}$$

kako je $\rho = \frac{m}{V}$, jednačina postaje

$$p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.}$$

to je Bernulijeva jednačina na jedinicu mase tečnosti. Svi članovi u jednačini imaju jedinice za pritisak tj

$$\left[\frac{N}{m^2} \right] = \left[\frac{\frac{kg \ m}{s^2}}{m^2} \right] = \left[\frac{kg}{m \ s^2} \right]$$

Veličina $\frac{\rho v^2}{2}$ zove se hidrodinamički pritisak jer njegova vrednost zavisi od brzine tečnosti.

Ako se gornji izraz podeli sa $\rho g = \gamma$ dobija se

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{const.}$$

Ovo je oblik Bernulijeve jednačine koji se odnosi na jedinicu težine idealne tečnosti. Njeni članovi imaju jedinicu dužine.

Naime, $\frac{P}{\gamma} = h$ i predstavlja manometarsku visinu odnosno energiju jedinice težine tečnosti. Energija tečnosti težine G je $Gh = G\frac{P}{\gamma}$. Ako je $G=1$ onda je energija $\frac{P}{\gamma}$. Član z je geodetska visina i predstavlja potencijalnu energiju jedinice težine tečnosti. (Tečnost težine G ima na visini z potencijalnu energiju Gz . Ako je $G=1$ onda je potencijalna energija z .) Član $\frac{v^2}{2g}$ je brzinska visina i takođe ima jedinicu dužine.

$$\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{\left[\frac{m}{s}\right]^2}{\left[\frac{m}{s^2}\right]} = [m]$$

Brojno predstavlja kinetičku energiju jedinice težine tečnosti. Naime, tečnost težine G tj. mase $m = \frac{G}{m}$ i

brzine v ima kinetičku energiju $\frac{G v^2}{g}$, a tečnost težine $G=1$ ima kinetičku energiju $\frac{v^2}{2g}$.

Prema tome, Bernulijevu jednačinu možemo i ovako izraziti - Pri stacionarnom strujanju idealne tečnosti je zbir geodetske visine, manometarske visine i brzinske visine u svakoj tački duž strujanja je konstantna veličina.

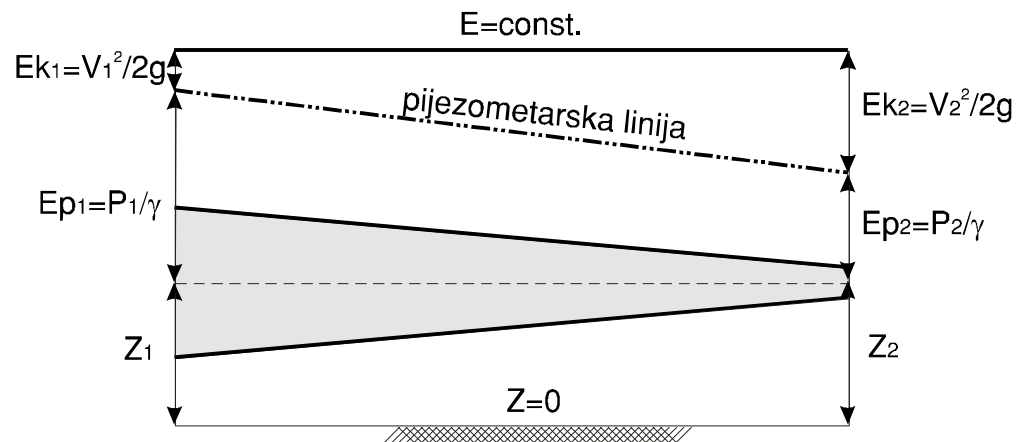
Ako označimo ukupan pritisak u tečnosti koja struji sa p_0 možemo napisati

$$p_0 = p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2}$$

Za horizontalnu cev može se uzeti $z=0$ pa je

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

iz čega proizilazi da je zbir hidrostatičkog i hidrodinamičkog pritiska idealne tečnosti na svim mestima horizontalne cevi konstantan.



Slika 32.

Iz prethodnog izraza takođe proizilazi važan zaključak koji daje odnos između pritiska p i brzine v u svakom preseku. Naime, na osnovu jednačine kontinuiteta proizilazi da je u većem preseku neke cevi brzina mala a iz Bernulijeve jednačine da se u tom slučaju pritisak p mora povećati kako bi ukupan pritisak p_0 ostao isti. Iz toga se vidi da je kod strujanja tečnosti brzina u većem preseku mala a pritisak veliki, dok je u malom preseku brzina velika a pritisak mali.

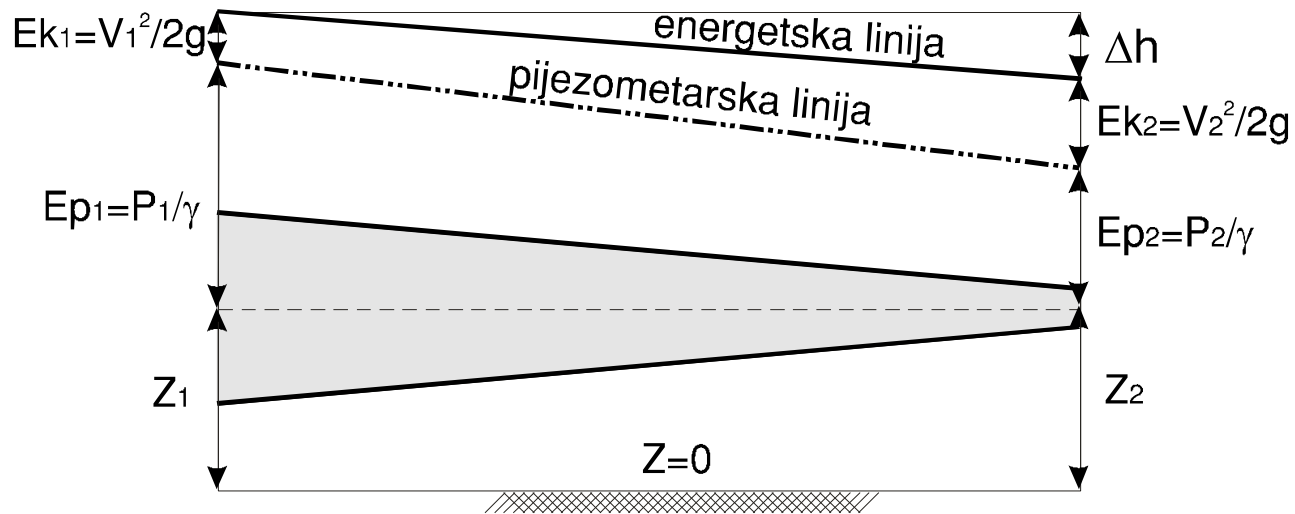
Bernulijeva jednačina važi i za gasove. Kod strujanja gasova razlikujemo aerostatički i aerodinamički pritisak.

2.3.4 Bernulijeva jednačina za realnu tečnost - linijski i lokalni gubici

Gornje jednačine važe za idealan fluid - fluid kod koga se zanemaruje trenje. Kod realne tečnosti moraju se uzeti u obzir gubici koji nastaju usled trenja, odnosno prelazka dela energije tečnosti u toplotnu energiju. U tom slučaju Bernulijeva jednačina glasi

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h$$

gde Δh predstavlja gubitak energije usled trenja.



Slika 33.

Razlikuju se lokalni i linijski gubici. Lokalni gubici javljaju se na suženjima u cevi, kolenima, proširenjima, krivinama,... a linijski gubici nastaju usled trenja o zidove cevi duž toka. Prema tome može se napisati

$$\Delta h = (\xi_{lok} + \xi_{lin}) \frac{v^2}{2g}$$

(A) Linijski gubici

$$\Delta h = \xi_{lin} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

gde je

- L - dužina cevi
- D - prečnik cevi
- ξ - koeficijent linijskog gubitka energije
- λ - koeficijent trenja (0.017 do 0.025) i dobija se iz različitih empirijskih formula od kojih se najčešće koriste

$$\lambda = 124.6 \frac{n^2}{\sqrt[3]{D}}$$

odnosno

$$\lambda = 0.115 \left(\frac{k}{D} \right)^{\frac{1}{4}}$$

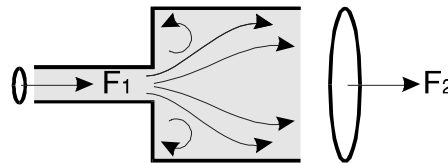
gde je

- n - Manningov koeficijent rapavosti ($0.011, 0.014 \text{ m}^{-\frac{1}{3}} \text{ s}$)
- k - apsolutna rapavost (izražena u milimetrima)

(B) Lokalni gubici

Proširenje

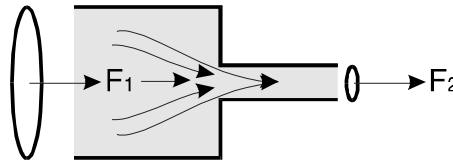
$\frac{F_2}{F_1}$	1.1	1.5	2.0	5.0
ξ_{lok}	0.01	0.25	1.00	10.00



Slika 34.

Suženje

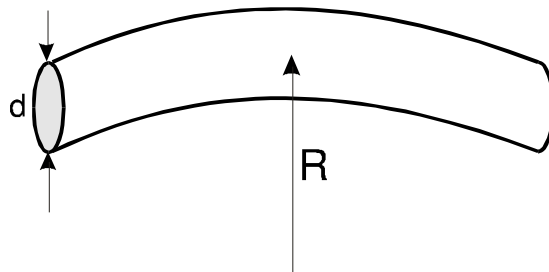
$\frac{F_2}{F_1}$	0.10	0.20	0.60	0.80	1.00
ξ_{lok}	0.50	0.42	0.25	0.15	0.00



Slika 35.

Krivina

$\frac{d}{2R}$	0.1	0.3	0.5	1.0
ξ_{lok}	0.13	0.16	0.25	1.98



Slika 36.