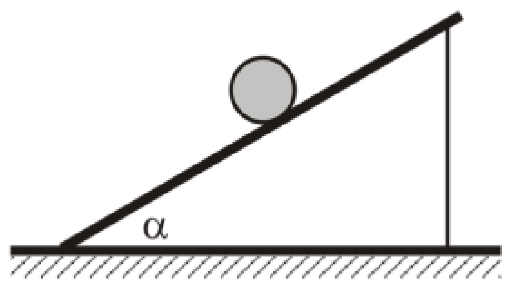
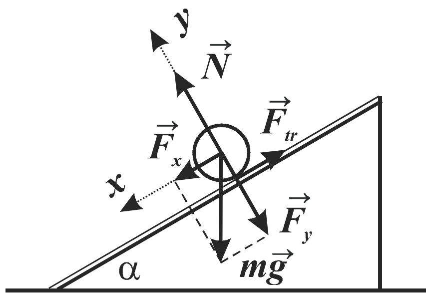
1.34 Na horizontalnom stolu nalazi se strma ravan nagibnog ugla $\alpha = 30°$. Niz strmu ravan bez proklizavanja kotrlja se lopta mase $m = 1kg$, sa momentom inercije u odnosu na centar mase, $I_C = \frac{2}{5}mr^2$. Odrediti ubrzanje centra mase lopte i silu trenja između lopte i strme ravni.



slika 1.34

1.34 Problem ćemo posmatrati u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase lopte. Telo će imati dve komponente kretanja: translatornu i rotacionu. Odgovarajuće jednačine dinamike koje uzimaju u obzir vrstu kretanja imaju sledeći oblik:



slika 1.34

$$ma_x = F_x - F_{tr}\ ,$$
$$ma_y = N - F_y,$$
$$I\alpha = rF_{tr}.$$

$$\Rightarrow \quad ma = mg\sin\alpha - F_{tr} \qquad (a_x = a)$$

$$\frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r} = rF_{tr} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}ma = F_{tr}$$

U slučaju kada nema proklizavanja linijsko i ugaono ubrzanje povezani su izrazom $a = r\alpha$. Koristeći gornje jednačine dolazi se do izraza za ubrzanje centra mase duž x -ose:

$$ma = \frac{1}{2}mg - \frac{2}{5}ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{7}g\,sin\,\alpha = 3.5m/s^2.$$

Na isti način dobija se izraz za silu trenja kotrljanja:

$$F_{tr} = \frac{2}{7}mg\,sin\,\alpha = 1.40N.$$

1.32 Zamajac (masivni disk) momenta inercije $I = 50kgm^2$ rotira ugaonom brzinom $\omega = 30rad/s$. Kolikim momentom sile treba delovati na njega da bi se zaustavio posle $n = 50$ obrtaja?

1.32 Pod delovanjem stalne sile zamajac će rotirati ravnomerno usporeno, pri čemu ugaona brzina zavisi od ugaonog pomeraja na sledeći način:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha\phi}.$$

U trenutku zaustavljanja ugaona brzina je $\omega = 0$, tako da je zaustavni ugaoni pomeraj $\phi_z = \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$. Moment sile povezujemo sa ugaonom brzinom rotacije koristeći osnovnu jednačinu dinamike za rotaciono kretanje,

$$M = I\alpha.$$

Iz prethodna dva izraza dolazi se do momenta sile koja deluje na zamajac,

$$M = \frac{I\omega_0^2}{4\pi n_z} = 71.6Nm,$$

pri čemu je zaustavni ugaoni pomeraj zamenjen brojem obrtaja koje telo napravi do zaustavljanja ($\phi_z = 2\pi n_z$)

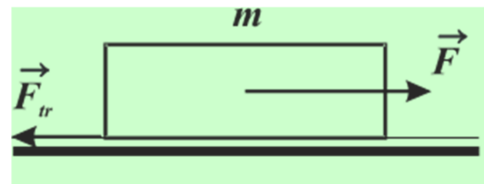
1.50 Telo čija je masa $m = 1kg$ nalazi se na horizontalnom stolu. Na telo koje se nalazilo u stanju mirovanja počne u jednom trenutku da deluje horizontalna sila $F = 5N$. Koliki rad će izvršiti ova sila za $t = 3s$, ako je koeficijent trenja između tela i stola $\mu = 0.1$?

1.50 Sila deluje u smeru pomeraja, tako da je povezana sa radom izrazom:

$$A = F\Delta x.$$

Na telo duž horizontalne ose deluju sile suprotnih smerova, tako da osnovnu jednačinu dinamike pišemo u sledećem obliku:

$$ma = F - F_{tr} = F - kmg.$$



slika 1.50

Ubrzanje tela direktno određujemo iz gornje jednačine:

$$a = \frac{F - kmg}{m}.$$

Kada na telo deluje stalna sila, kretanje je ravnomerno ubrzano, a pređeni put dat je izrazom:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{(F - kmg)t^2}{2m}.$$

Koristeći prvu i poslednju jednačinu dobija se traženi izraz za izvršeni rad:

$$A = \frac{(F - kmg)Ft^2}{2m} = 90.4J.$$

1.51 Reka ima protok $q = \frac{V}{t} = 5m^3/s$. Ako se pregradi napraviće se veštačko jezero koje će omogućiti da voda sa visine $h = 60m$ pada na lopatice turbine. Kolika je korisna snaga turbine, ako je stepen korisnog dejstva $\eta = 90\%$?

1.51 Snagu turbine odredićemo iz izraza:

$$P_k = \eta P_u,$$

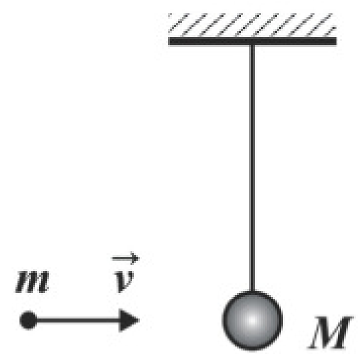
gde je sa P_k, obeležena korisna snaga, a sa P_u “uložena” snaga. Korisna snaga turbine određena je brzinom promene potencijalne energije vode:

$$P_k = \frac{\eta \Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\eta m g h}{\Delta t} = \frac{\eta \rho V g h}{\Delta t}.$$

Kako je protok $q = \frac{V}{\Delta t}$, gornji izraz transformiše se u:

$$P_k = \eta \rho q g h = 2.65 MW.$$

1.57 Balističko klatno mase $M = 5kg$ obešeno je o laganu, neistegljivu nit. U klatno uleće metak mase $m = 20g$ brzinom $v = 500\, m/s$. Do koje maksimalne visine će se posle toga klatno podići, ako metak posle prodora ostane u njemu?



slika 1.57

1.57 Posmatrani sistem je izolovan, tako da se može primeniti zakon održanja impulsa:

$$mv = (m + M)v_1.$$

Dobijena vrednost brzine balističkog klatna sa metkom omogućuje da se odredi kinetička energija sistema *klatno* + *metak*. Treba napomenuti da početna kinetička energija metka nije jednaka kinetičkoj energiji sjedinjenog sistema, jer se jedan deo kinetičke energije metka transformiše u toplotu u procesu sudara, pri ulasku metka u balističko klatno. Pošto je metak prodro u balističko klatno, kinetička energija sistema se smanjuje i transformiše u potencijalnu energiju:

$$\frac{1}{2}(m + M)v_1^2 = (m + M)gh.$$

Smenom brzine iz prvog izraza u poslednji, dolazi se do maksimalne visine penjanja:

$$h = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 0.20m.$$

1.62 Pritisak vode u gradskoj mreži, u prizemlju neke višespratne zgrade iznosi $p_0 = 5\, bara$. Odrediti brzinu isticanja vode na četvrtom i na osmom spratu zgrade. Odrediti najviši sprat do kog će dospeti voda. Smatrati da je spratna visina $\Delta h = 3.5m$.

Napomena: Jedinica za pritisak, *bar*, ne pripada SI sistemu jedinica, ali je njena upotreba dozvoljena. Sa *paskalom* je povezana sledećom relacijom $1bar = 100000Pa$.

1.62 Postavićemo Bernulijevu jednačinu za dve tačke, jednu u prizemlju zgrade, gde je pritisak p_0, i drugu na nekom spratu zgrade, koji ćemo obeležiti sa n

$$p_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{atm} + \rho g h_n + \frac{1}{2}\rho v_n^2 \ .$$

U jednačini je sa p_{atm} označen atmosferski pritisak na mestu isticanja vode iz slavine. Visinu računamo u odnosu na prizemlje, tako da je $h_0 = 0$, dok je visina na n-tom spratu $h_n = n\Delta h$. Usled velike razlike u prečniku vodovodne cevi i slavine, dinamički pritisak u vodovodnoj cevi u prizemlju možemo zanemariti. Uzimajući u obzir navedeno, Bernulijeva jednačina dobija sledeći oblik:

$$p_0 = p_{atm} + \rho g n\Delta h + \frac{1}{2}\rho v_n^2.$$

Tražena brzina isticanja vode na n-tom spratu data je izrazom

$$v_n = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_{atm} - \rho g n\Delta h)}{\rho}}.$$

Brzine isticanja vode na četvrtom, odnosno osmom spratu biće

$$v_4 = 22.88\,\frac{m}{s} \quad \text{i} \quad v_8 = 15.77\,\frac{m}{s}.$$

Do kog će sprata voda dospeti možemo odrediti koristeći Bernulijevu jednačinu za statične fluide ($v = 0$)

$$p_0 = p_n + \rho g n \Delta h,$$

gde je sa p_n označen statički pritisak na n-tom spratu. Uslov za isticanje vode na n-tom spratu je ispunjen kada je $p_n > p_{atm}$. Imajući u vidu gornju jednačinu, dobija se

$$p_n = p_0 - \rho g n \Delta h,$$

odnosno

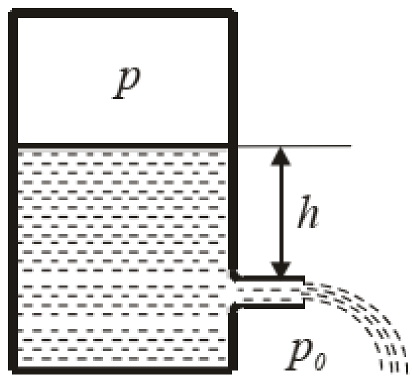
$$p_0 - \rho g n \Delta h > p_{atm},$$

pri čemu je vrednost n data izrazom

$$n < \frac{p_0 - p_{atm}}{\rho g \Delta h} = 11.62.$$

Najviši sprat do kog će voda dospeti pod datim uslovima, predstavlja najbližu celobrojnu vrednost za koju je $n_{max} < n$. Imajući u vidu zadate vrednosti, najviši sprat do kog će voda dospeti je $n_{max}=11$.

1.65 Odredite brzinu stacionarnog isticanja idealne nestišljive tečnosti kroz mali otvor koji se nalazi na rastojanju $h = 20cm$ ispod površine vode. Voda se nalazi u zatvorenom sudu pod pritiskom $P = 1.1 \cdot 10^5 Pa$. Atmosferski pritisak je $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 Pa$.



slika 1.65

1.65 Postavićemo Bernulijevu jednačinu za dva preseka od kojih se prvi nalazi na površini tečnosti u sudu, drugi je na mestu isticanja tečnosti iz suda:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho_1 g h_2.$$

Visinu ćemo računati počev od mesta otvora na sudu, tako da je $h_1 = h$ i $h_2 = 0$. Pritisak u sudu jednak je statičkom pritisku u tački jedan, tako da je $p_1 = p$, dok je na otvoru suda statički pritisak jednak atmosferskom, $p_2 = p_0$. Pošto je $S_1 >> S_2$, uzimajući u obzir jednačinu kontinuiteta, hidrodinamički pritisak u tački jedan može se zanemariti, tako da ćemo pisati $v_2 = v$. Zamenom ovako određenih veličina u Bernulijevu jednačinu dobija se:

$$p + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Iz gornjeg izraza određujemo brzinu isticanja tečnosti iz suda pod pritiskom:

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho} + 2gh} = 4.68 m/s\ .$$